

文章编号:1000-8055(2011)10-2161-06

基于小波尺度函数的 WSK-SV 算法 及其气动性能预测

王保国¹, 徐燕骥^{1,2}, 安 二¹, 孙 拓¹

(1. 北京理工大学 宇航学院 高速气动热与人机工程中心, 北京 100081;

2. 中国科学院 工程热物理研究所, 北京 100190)

摘 要: 提出了一种将小波的尺度函数与 SV(support vector)算法相结合的 WSK-SV(wavelet scaling kernel-support vector)新算法,并将 Daubechies 小波以及 Shannon 小波的尺度函数分别构成尺度核函数,而且分别作为 SV 算法中一个可容许的支持向量核函数使用. 该算法充分利用了 Daubechies 小波函数的紧支集与正交等特点以及小波的 MRA(multi-resolution analysis, 多分辨率分析),并注意了尺度核函数能够满足 Mercer 条件. 该算法除了具有通常 SVM(support vector machine)所具有的优点外,还具有很好的收敛性以及泛化能力,能够有效地提高学习与预测效率. 典型算例选取了不同的小波尺度函数,数值计算表明:在一维、二维和三维问题中,这些小波的尺度函数均可以用于 WSK-SV 算法,进而显示了这个新算法的可行性与通用性.

关 键 词: WSK-SV(wavelet scaling kernel-support vector)算法; Daubechies 小波; Shannon 小波;
小波尺度核函数; 凸二次规划; 气动性能预测

中图分类号: V19

文献标志码: A

WSK-SV algorithm based on scaling function of wavelet and its prediction for aerodynamic performance

WANG Bao-guo¹, XU Yan-ji^{1,2}, AN Er¹, SUN Tuo¹

(1. Aerothermodynamics and Man-Machine-Environment Laboratory,
School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China;

2. Institute of Engineering Thermophysics,
Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: A new wavelet scaling kernel-support vector (WSK-SV) algorithm based on scaling function of wavelet and support vector (SV) algorithm was presented in this paper, which firstly took Daubechies and Shannon wavelet-scaling kernel function for a kind of admissible support vector kernel, respectively. WSK-SV algorithm possesses such properties as compactly supported wavelet bases, orthogonal bases, multiresolution analysis (MRA), and satisfies Mercer condition for scaling kernel function. This algorithm not only has the advantages of general support vector machine (SVM), but also has a good convergence and excellent capacity of generalization, which can improve the learning efficiency and predicting ability. Numerical experiments demonstrate that this proposed WSK-SV algorithm is feasible and effective.

收稿日期:2011-06-07; 修订日期:2011-07-06

基金项目:国家自然科学基金(50376004); 高等学校博士学科点专项基金(20030007028)

作者简介:王保国(1947—),男,山东临清人,教授、博士生导师,博士,研究领域:计算流体力学、高速气动热力学。

Key words: WSK-SV (wavelet scaling kernel-support vector) algorithm;
Daubechies wavelet; Shannon wavelet; wavelet scaling kernel function;
convex quadratic programming; prediction for aerodynamic performance

随着多目标、多学科优化工作的进展,在气动设计优化中的设计变量愈来愈多,流场数值优化的计算量越来越大^[1],因此一方面需要在优化算法上开展工作,提高求解效率^[2-3],另一方面也需要发展相关的一些预测办法^[4-5],例如响应面法、小波神经网络算法等.近年来支持向量(support vector,简称SV)算法在生物信息学中的生物蛋白质结构预测、电力系统规划决策、文本图像识别、人脸识别、指纹压缩技术、混合气体的红外光谱分析、互联网金融数据挖掘(例如股票价格、指数时间序列的预测)等方面获得了非常成功的应用,而本文则试图用于流场性能的预测.这里应当指出这种算法不仅有着统计学习理论(statistical learning theory,简称SLT)的坚实基础,而且还具有直观的几何解释以及完美的数学形式^[6-7].该算法将函数逼近和估计问题转化成求解一个凸二次规划优化问题,从而有利于获取全局的最优解,它克服了BP(back propagation)神经网络通常存在的局部极值问题以及存在着网络学习收敛速度慢的问题.在SV算法中,对于非线性问题通常可以用一个由低维空间 $\mathbf{R}^n$ 到高维Hilbert空间 $\mathbf{R}^h$ 的非线性映射 $\phi(\cdot): \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^h$,把低维 $\mathbf{R}^n$ 空间的非线性问题转化为高维 $\mathbf{R}^h$ 空间的线性问题,并定义高维 $\mathbf{R}^h$ 空间的内积运算,即

$$K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = (\phi(\mathbf{x}_i) \cdot \phi(\mathbf{x}_j)) = \langle \phi(\mathbf{x}_i), \phi(\mathbf{x}_j) \rangle \quad (1)$$

式中 $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ 称为核函数;符号 $(\cdot)$ 与 $\langle, \rangle$ 均表示Hilbert空间中的内积.在SV算法中,核函数起着直接的重要作用,通常需要通过Mercer定理去使用核技巧^[8].

小波分析理论也是近十年发展起来的一种新的数学分析方法,是继Fourier变换以来的又一个重大理论突破^[9],虽然人们常遇到的小波有许多种(这里仅列举10种:Mexican Hat小波、Morlet小波、Haar小波、Shannon小波、Gauss小波、Meyer小波、Franklin小波、Battle-Lemarie小波、Daubechies小波和Coiflets小波),但并不是所有的小波系都可以由多分辨分析(MRA)导出的,不过目前实际应用的许多重要小波系都有对应的MRA,这种MRA方法已成为构造小波系的一个重要工具.可否将小波多分辨分析用于上面式(1)

中核函数的构造,正是本文要探讨的问题.

1 SV算法以及凸二次规划

令 $S = \{(\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \dots, (\mathbf{x}_l, y_l)\} \in (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R})^l$ 为给定的训练集,其中 $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^n, y_i \in \mathbf{R}, i = 1, 2, \dots, l$;选取适当的核函数 $K(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ 和参数 $\nu \in (0, 1]$ 以及惩罚参数 $C > 0$,于是构造并求解如下形式的凸二次规划问题:

$$\min_{\Omega} F(\Omega) = \frac{1}{2} \Omega^T \cdot Q \cdot \Omega - \Omega^T \cdot Y \quad (2)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \sum_{i=1}^l \Omega_i = 0 \\ \sum_{i=1}^l (\alpha_i + \beta_i) \leq \nu C \\ 0 \leq \alpha_i \leq \frac{C}{l} \quad (i = 1 \sim l) \\ 0 \leq \beta_i \leq \frac{C}{l} \quad (i = 1 \sim l) \end{cases} \quad (3)$$

式中 α_i 与 β_i 分别为原始问题(primal problems)与对偶问题(dual problems)的求解变量,符号 Ω , Q 与 Y 的定义为

$$\Omega = [\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_l]^T, \quad Y = [y_1, y_2, \dots, y_l]^T \quad (4)$$

$$\Omega_i = \beta_i - \alpha_i \quad (5)$$

$$Q = (q_{ij})_{l \times l}, \quad q_{ij} = K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \quad (6)$$

这里 Q 是以核函数 $K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)$ 为元素所形成的一个矩阵.显然,由式(2)与(3)所构成的凸二次规划问题可得到关于 α_i 与 β_i 的解,并分别记作 α_i^* 与 β_i^* .

2 回归问题的决策函数

选取位于开区间 $(0, c/l)$ 中的 α_j^* 与 β_k^* (这里 α_j^* 与 β_k^* 代表由式(2)与(3)所得的关于 α_i 与 β_i 解中的分量),据此去进行如下的计算:如果令 b^* 为

$$\begin{aligned} b^* &= \frac{1}{2} (y_j + y_k) - \\ &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l [(\beta_i^* - \alpha_i^*) K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)] - \\ &\frac{1}{2} \sum_{i=1}^l [(\beta_i^* - \alpha_i^*) K(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_k)] \end{aligned} \quad (7)$$

则借助于通常的SV算法便可得到决策函数

$g(x)$ 为

$$g(x) = \sum_{i=1}^l [(\beta_i^* - \alpha_i^*) K(x_i, x)] + b^* \quad (8)$$

3 Daubechies 小波以及尺度核函数

3.1 紧支集正交小波的两尺度方程

设 $\{V_j\}$ 给出了 $L^2(\mathbf{R})$ 空间的一个多分辨率分析(MRA), 令 W_j 是 V_{j+1} 中 V_j 的补空间, 即有

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (9)$$

令 $\phi(x)$ 与 $\varphi(x)$ 分别代表小波函数与它的尺度函数, 它们的两尺度关系(又称两尺度方程)分别为

$$\phi(x) = \sum_n [g_n \varphi(2x - n)] \quad (10)$$

$$\varphi(x) = \sum_n [h_n \varphi(2x - n)] \quad (11)$$

并且有

$$\begin{cases} H(z) = \frac{1}{2} \sum h_n z^n, & G(z) = \frac{1}{2} \sum g_n z^n \\ |z| = 1, & z = e^{-i\omega} \end{cases} \quad (12)$$

Daubechies 小波为紧支集的正交小波, 它的尺度函数也为紧支集的正交尺度函数, 这就是说数列 $\{h_n\}$ 与 $\{g_n\}$ 分别仅含有限个非零元素^[10-11]. 注意到这时 φ 为紧支集, 另外 $H(z)$ 是关于 ω 的 2π 周期函数, 也就是说它是关于 ω 的一个三角多项式, 即

$$H(z) = \left[\frac{1+z}{2} \right]^N S(z), \quad |z| = 1 \quad (13)$$

式中 $S(z)$ 是关于 ω 的三角多项式. 另外由正交性, 还有如下关系式成立, 即

$$\begin{cases} |H(z)|^2 + |H(-z)|^2 = 1, & |z| = 1 \\ |G(z)|^2 + |G(-z)|^2 = 1, & |z| = 1 \end{cases} \quad (14)$$

令 $H_N(z)$ 代表方程(13)与(14)的解, 注意到对于每个 N , 相应的 $H_N(z)$ 具有 $2N$ 个非零系数, 并可以写成

$$H_N(z) = \sum_{n=0}^{2N-1} (h_n^N e^{-in\omega}), \quad z = e^{-i\omega} \quad (15)$$

式中 h_n^N 称为关于 N 的低通滤波器系数. 这里应指出的是, 通常国内外出版的小波分析方面的书籍仅给出 $N=2$ 到 $N=10$ 时低通滤波器系数值, 而文献[10-11]给出了 $N=2$ 到 $N=30$ 时的 $\{h_n^N\}$ 的值. 图 1 给出了 $N=11$ 时 Daubechies 小波函数 ψ 与尺度函数 φ 的图形. 图 2 给出了

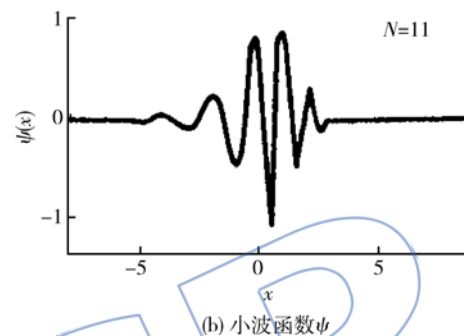
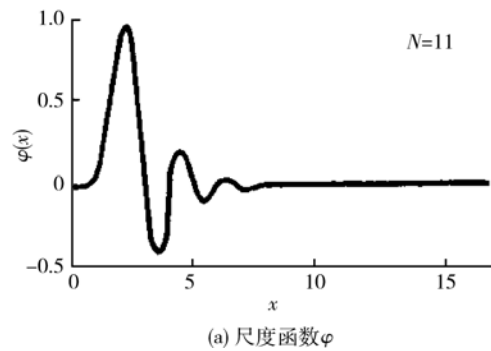


图 1 $N=11$ 时 Daubechies 小波的 φ 与 ψ 图形
Fig. 1 Plots of φ and ψ about Daubechies wavelet when $N=11$

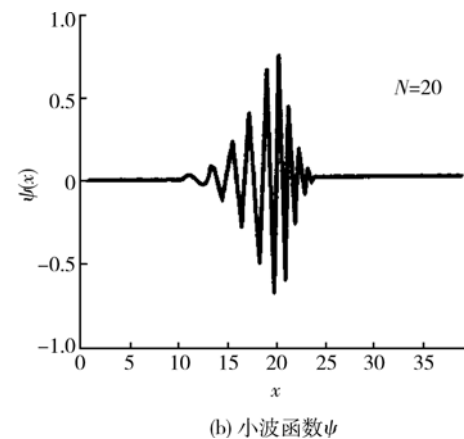
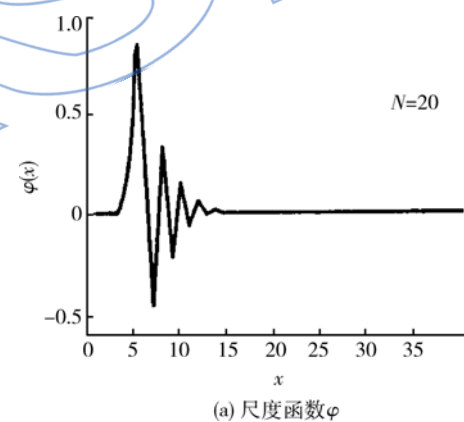


图 2 $N=20$ 时 Daubechies 小波的 φ 与 ψ 图形
Fig. 2 Plot of φ and ψ about Daubechies wavelet when $N=20$

$N = 20$ 时的相应图像. 显然, Daubechies 小波是非对称的. 可以证明: 除 Haar 基以外, 所有具有紧支集的实的标准正交小波都是非对称的. 最后还有一点应指出: 小波的正则性(它反映了函数的光滑度)与尺度函数的衰减率有关, 也与消失矩(vanishing moment)有关. 另外, Daubechies 小波族不是插值小波, 但它可近似认为是平移插值小波.

3.2 小波尺度核函数以及 L^2 空间上的完备基

首先, 这里给出支持向量的定义. 由前面式(2)与(3)所构成的凸二次规划中的解 α_i^* 与 β_i^* , 如果 $\alpha_i^* \neq 0$ 或 $\beta_i^* \neq 0$ 时, 则所对应于训练集 S 里样本点 $(\mathbf{x}_i, y_i)$ 中的 $\mathbf{x}_i$ 便称为支持向量(SV). 在统计学理论中, Mercer 条件提供了判断与构造核函数的方法. 除了这种点积核之外, 还有一种平移不变核, 因此如果满足 Mercer 条件, 则点积形式的小波核函数为

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \prod_{i=1}^n \left[\psi \left(\frac{x_i - b_i}{a} \right) \psi \left(\frac{x'_i - b'_i}{a} \right) \right] \quad (16)$$

以及满足平移不变核定理的小波核函数

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \prod_{i=1}^n \psi \left(\frac{x_i - x'_i}{a} \right) \quad (17)$$

时, 则它们均应该是可容许的支持向量核; 换句话说, 并不是所有的小波函数都能够满足式(16)或式(17). 在上述两式中, $\psi(x)$ 为母小波函数, a 为尺度因子, b_i 与 b'_i 均为位移因子; 另外, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$ 并且这里还认为多维小波函数可以写成多个可分离的一维小波函数的张量积, 即

$$\phi(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \phi(x_i) \quad (18)$$

事实上欲寻找符合上述条件的核函数, 这种核函数仅通过平移就能生成 $L^2(\mathbf{R})$ 空间上的一组完备的基, 其实这样的函数就可以选取小波的尺度函数. 很容易证明由尺度函数所构成的尺度核函数是满足 Mercer 条件的, 它可以取作支持向量的核函数来使用. 尺度核函数实际上就是具有平移因子的多维尺度函数, 它可以构成一组完备的基, 于是对于 $L^2(\mathbf{R})$ 空间上的任意函数均可以由这组基的线性表达式给出. 因此尺度核函数支持向量算法便相当于在以多维尺度函数及其平移为基所张成的尺度空间中去寻找原始问题最佳逼近尺度系数的问题, 也就是说去求解 SVM(support vector machine)中的 Lagrange 乘子.

令一维小波的尺度函数为 $\varphi(x)$, 于是可分离的多维尺度函数 $\varphi(\mathbf{x})$ 便可以写为

$$\varphi(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^n \varphi(x_i) \quad (19)$$

其中每个一维尺度核函数 $\varphi(x)$ 都应该满足如下容许条件, 即

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 1 \quad (20)$$

或者

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 0 \quad (21)$$

式中 $\psi(x)$ 为小波函数. 构造平移不变的尺度核函数

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \prod_{i=1}^n \varphi(x_i - x'_i) \quad (22)$$

于是采用尺度核函数时, SVM 的决策函数 $g(\mathbf{x})$ 便可写为

$$g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^l [(\beta_i^* - \alpha_i^*) \prod_{j=1}^n \varphi(x_j^{(i)} - x_j)] + b^* \quad (23)$$

式中 $x_j^{(i)}$ 表示第 j 个训练样本的第 i 分量; 其他符号的含义与式(8)相同. 另外, 还应指出: 在式(16), (17), (18), (19), (22)与(23)中的 n 代表空间的维数或者所研究问题的设计变量数. 正如文献[12]所指出的, 在三维与二维欧氏空间中进行多分辨分析(MRA)时, 需要在尺度空间与小波空间分别引进尺度基与小波基. 对二维问题, 尺度基与小波基的基底要由 1 个尺度函数与 3 个小波函数组成, 而三维时要由 1 个尺度函数和 7 个小波函数组成. 正由于这个原因, 对于二维与三维问题使用尺度核(例如这里的式(22))是方便的.

4 WSK-SV 算法及其基本结构

图 3 给出了 WSK-SV 算法及其基本结构简图, 显然它不同于小波神经网络的结构(例如文献[13]的图 1).

令 $S = \{(\mathbf{x}_1, y_1), (\mathbf{x}_2, y_2), \dots, (\mathbf{x}_l, y_l)\} \in (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R})^l$ 为训练集, 在所有输入向量中, 假定支持向量有 N 个, 它们分别为 $SV_1, SV_2, \dots, SV_N$, 借助于小波变换, 便可得到对应的满足 Mercer 条件的小波尺度函数 $\varphi(\mathbf{x}_1), \dots, \varphi(\mathbf{x}_N)$ 以及小波框架 $\psi(\mathbf{x}_1), \psi(\mathbf{x}_2), \dots, \psi(\mathbf{x}_N)$, 于是利用式(22)便能求出相应的核函数, 由式(23)便可得到决策函数 $g(\mathbf{x})$.

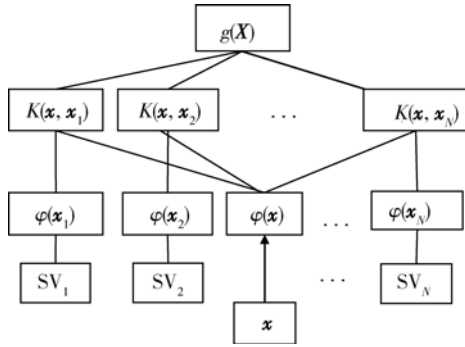


图 3 WSK-SV 算法及其基本结构简图

Fig. 3 Basic frame of WSK-SV algorithm

5 典型算例与分析

5.1 WSK-SV 算法所逼近的曲线算例

在闭区间 $[-10, 10]$ 上均匀地选取 300 个点作为训练数据,其相应的输出量 y_i 为

$$y_i = 2\sin(-3cx_i)\exp(-0.1x_i^2) - \sin cx_i - 0.002x_i \quad (24)$$

取惩罚因子 $c = 100$; 这里分别采用 WSK-SV 算法与人工神经网络(ANN)进行计算,得到逼近误差分别为 0.0022 与 0.034,显然 WSK-SV 的精度比 ANN 的高.图 4 给出 WSK-SV 算法所逼近的结果,计算时采用 Daubechies 小波的尺度核函数.

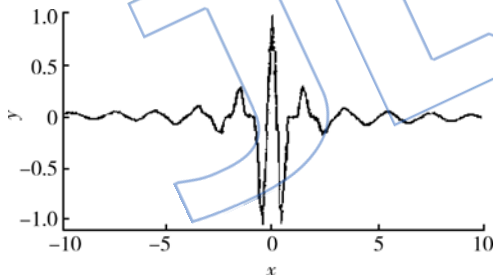


图 4 WSK-SV 算法所逼近的曲线算例

Fig. 4 Resulting approximation by WSK-SV

5.2 WSK-SV 算法所逼近的曲面算例

在闭区间 $[-2, 2] \times [-2, 2]$ 上均匀选取 400 个输入点,其相应的输出量 z_i 为

$$z_i = (x_i^2 - y_i^2)(\cos x_i + \sin y_i) \quad (25)$$

这里采用 WSK-SV 算法进行了计算.在计算中,核函数分别取 Daubechies 小波的尺度核函数以及 Gauss 径向基(RBF)核函数.这里 RBF 核函数的表达式为

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp\left\{-\frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|^2}{\sigma^2}\right\} \quad (26)$$

计算时 $\sigma = 2.63$.图 5 给出了本文采用 WSK-SV 算法得到的曲面.在这两种计算中所得的支持向量个数分别为 83(采用 Daubechies 尺度核函数时)与 106(采用 RBF 核函数时),计算误差分别为 0.00033(采用 Daubechies 时)与 0.00082(采用 RBF 时).显然 WSK-SV 算法不仅有较高的回归精度,而且减少了支持向量的数目.

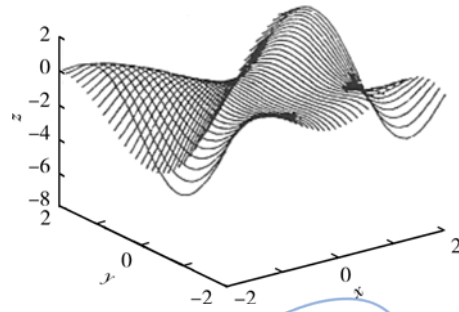


图 5 WSK-SV 算法所逼近的曲面算例

Fig. 5 Resulting approximation by WSK-SV algorithm

5.3 超声速射流元件三维流场性能预测

超声速射流元件的结构形状如图 6 所示,这类元件多用于飞行器的飞行控制,文献[5]的表 1 与表 2 给出了 21 个样本.为进一步考核 WSK-SV 算法在多个设计变量下的预测能力,这里又增加了 243 个样本(原则上按每个设计变量增加 3 个),于是这时的训练集便为 264 个样本.显然这里 $n = 5$, $l = 264$,并且输出量有 3 个,它们充分反映了该问题三维流场的性能.为了进一步考察在 WSK-SV 算法中的尺度核函数的通用性,本算例选用了 Shannon 小波的尺度函数作为 WSK-SV 算法中所使用的核函数. Shannon 小波是正交小波,在时域中是支集无限的(即不具有紧支集),它的尺度函数具有平移正交性,而且在时间上衰减较快(但它不是严格的局域函数). Shannon 小波尺度函数的表达式为

$$\varphi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \quad (27)$$

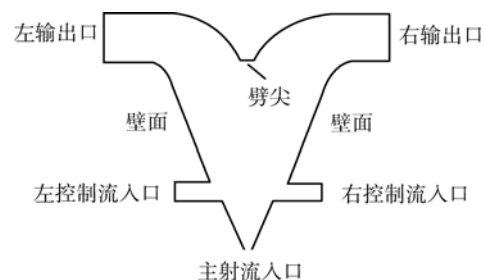


图 6 超声速射流元件的结构示意图

Fig. 6 Frame of supersonic jet components

图7给出了 Shannon 小波尺度函数的图形, 它的尺度核函数为

$$K(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \prod_{i=1}^n \frac{\sin[\pi(x_i - x'_i)]}{\pi(x_i - x'_i)} \quad (28)$$

如果超声速射流元件的结构参数取为 $D=0.019721\text{ m}$, $R=0.007816\text{ m}$, $\tilde{H}=0.0198364\text{ m}$, $S=0.0063408\text{ m}$, $L=0.0067981\text{ m}$ (这里 D , R , $\tilde{H}$, S 和 L 分别代表控制口离喉部的距离、劈尖半径、输出通道宽度、位差和控制口宽度) 时, 于是以式(28)为核函数, 采用 WSK-SV 算法预测出的流场推力为 11572 N , 而采用响应面法以及小波神经网络法得到的分别为 11644 N 与 11599 N , 由三维 Navier-Stokes(N-S)方程计算出的流场合推力为 11526 N , 显然本文由 WSK-SV 算法所预测的合推力更贴近于期望值(即三维流场的计算结果)。

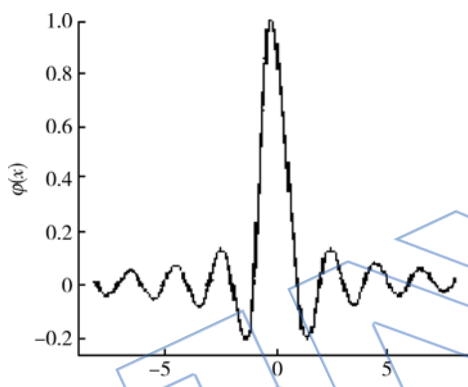


图7 Shannon 小波的尺度函数

Fig. 7 Scaling function of Shannon wavelet

6 主要结论

1) 3个典型算例, 从一维、二维和三维问题的不同侧面初步显示了本文所提出的 WSK-SV 新算法是可行的与有效的。算例2(二维问题)与算例3(三维流动问题)分别采用了 Daubechies 小波的尺度核函数与 Shannon 小波的尺度核函数, 前者为正交紧支小波, 后者虽不是紧支的但它是正交小波, 而且尺度函数有显式的数学表达式, 它们都能成功地用于本文的 WSK-SV 算法中, 从而进一步显示了 WSK-SV 算法的可行性与通用性。

2) 该算法所预测出的流场性能要比响应面法以及小波神经网络法更贴近于期望值并且精度也较高。但应该指出的是: 从计算所占用的时间上看, 响应面法最少, 而 WSK-SV 算法与小波神经网络算法所用的时间大体上相当, 它们与响应面方法相比时间要长许多, 因此进一步探讨 WSK-SV 的高效算法乃是一个很好的研究方向。

参考文献:

- [1] CHEN Naixing. Aerothermodynamics of turbomachinery: analysis and design[M]. Singapore: John Wiley & Sons, 2010.
- [2] 王保国, 刘淑艳, 李翔. 基于 Nash-Pareto 策略的两种改进算法及其应用[J]. 航空动力学报, 2008, 23(2): 374-382. WANG Baoguo, LIU Shuyan, LI Xiang. Two improved algorithms based on Nash-Pareto strategy and their applications[J]. Journal of Aerospace Power, 2008, 23(2): 374-382. (in Chinese)
- [3] Deb K, Pratap A, Agarwal S, et al. A fast and elitist multi-objective genetic algorithm: NSGA-II[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182-197.
- [4] Kim J H, Choi J H, Husain A, et al. Multi-objective optimization of a centrifugal compressor impeller through evolutionary algorithms[J]. Journal of Power and Energy, 2010, 224(5): 711-721.
- [5] 王保国, 吴俊宏, 刘淑艳. 流场特性预测的两类高效方法[J]. 航空动力学报, 2010, 25(8): 1763-1767. WANG Baoguo, WU Junhong, LIU Shuyan. Two effective methods for flow-field performance forecast[J]. Journal of Aerospace Power, 2010, 25(8): 1763-1767. (in Chinese)
- [6] Vapnik V N. The nature of statistical learning theory[M]. New York: Springer, 1996.
- [7] Suykens J A K, Gestel T V, Brobanter J D, et al. Least squares support vector machines[M]. Singapore: World Scientific, 2002.
- [8] Schölkopf B, Burges C J, Smola A J. Advances in kernel methods: support vector learning[M]. Boston: MIT Press, 1999.
- [9] Mallat S. A wavelet tour of signal processing[M]. 2nd ed. San Diego: Academic Press, 1999.
- [10] WANG Baoguo, WU Junhong. Construction of Daubechies wavelet and its application in shock capturing[R]. Gyeongju: 9th International Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows (ISAIF), 2009-3D-1, 2009.
- [11] WU Junhong, WANG Baoguo. A new numerical method based on wavelet detection and its application[R]. Gyeongju: 9th International Symposium on Experimental and Computational Aerothermodynamics of Internal Flows (ISAIF), 2009-2D-3, 2009.
- [12] 王保国, 吴俊宏, 朱俊强. 基于小波奇异分析的流场计算方法及应用[J]. 航空动力学报, 2010, 25(12): 2728-2747. WANG Baoguo, WU Junhong, ZHU Junqiang. Method based on wavelet singularity analysis for complicated flow and its application[J]. Journal of Aerospace Power, 2010, 25(12): 2728-2747. (in Chinese)
- [13] 王保国, 刘淑艳, 钱耕. 一种小波神经网络与遗传算法结合的优化方法[J]. 航空动力学报, 2008, 23(11): 1953-1960. WANG Baoguo, LIU Shuyan, QIAN Geng. Optimisation method by combination of wavelet neural networks and genetic algorithm[J]. Journal of Aerospace Power, 2008, 23(11): 1953-1960. (in Chinese)